量子の数理の核心を求めて

西郷甲矢人（ZEN 大学）

1　はじめに

ポアンカレの有名な言葉に、「数学は異なるものごとに同じ名前を与えるわざである」というものがあるが、たしかに全く異なる現象に対して「同じ数学」が適用可能であることはしばしばある。たとえば群論は、数学の諸分野はもちろんのこと結晶学・素粒子論からパターン認識まで幅広い領域において活躍している。だが一歩踏み込んで考えてみると、それらの「異なる現象」には通底する構造があり、その構造に根ざすからこそ適用可能なのだということも可能である。本稿においては、「量子の数理」の核心に迫りたい。量子論にはさまざまな数学が用いられるが、本稿においてはそれらのうちで、その根拠となりうる数理構造として「非可換確率論」に注目する。第二節では、この非可換確率論の概要を述べる。さらに第三節においては、非可換確率論の主題である非可換確率空間を「圏」とよばれる数学的構造の上で考えられることに注目して、非可換確率論が必要となるのはなぜかについて考える基盤を与える。さらに、第四節においては本稿のまとめを行うとともに、この観点からオフシェル科学とは何かについて簡単に述べる。

2　非可換確率論とは何か？

2.1　量の代数

自然科学において、「系（system）」とは世界の一部分を時間的・空間的なまとまりとして抽出したものであり、絶えず変化する「現象（phenomenon）」として捉えられるべきものである。系に関する記述においては、系が持つ諸側面を「量（quantity）」として扱うことが有効である。量が優れているのは、それらの間に代数的な演算（和、積など）を定義できる点にある。この性質を「量は代数（algebra）をなす」と表現する。物理量が「具体的な値」ではなく「代数」の元（要素）として記述される理由は、一般にその値が不確定であるためである。物理量の値は、系そのものの特性だけでなく、それが置かれる「環境（environment）」との相互作用に強く依存する。このような系では、物理量はその値と同一視すべきものではなく、代数における「不定元（indeterminate）」として扱われる必要がある。量子論において重要なのは、この不定元としての物理量の積が一般に「非可換（noncommutative）」であること、すなわち $ab = ba$ が成り立たない場合がある点である。この非可換性は、量が単なる静的な特性ではなく、「作用（action）」や「過程（process）」を表していることを示唆している。操作の順序によって結果が変わるように、非可換な代数は、世界が静的な実体ではなく動的なプロセスから構成されているという認識と深く結びついている。この観点から見れば、可換な量のみで世界を記述できる状況は、むしろ限定的な特殊ケースである。

2.2　状態

「不定元」としての量からなる代数をもつ系に対して、われわれはどのように法則性を議論できるのだろうか。この問いに答えを与えるのが、「状態（state）」の概念である。ある系に対する環境とは、その系と密接に関係する（他の）系を指す。この関係性のもとで、物理量の具体的な値

は揺らぐが、その期待値（expectation value）は定まると考えられる。状態とは、この物理量と期待値との対応付けであり、系と環境の相互作用によって定まる統計的な法則性そのものである。この定式化における最も重要な哲学的含意は、状態が系に内在するものではないという点である。状態は、小嶋泉が主張するように、系と環境の「インターフェイス（interface)」である。全く同一の系であっても、それをどのような環境（実験設定）に置くか（そしてどこまでを環境と考えるか）によって、その状態は異なるのである。

2.3　非可換確率空間とその表現

非可換確率空間は、古典確率論（通常の、測度論的な確率空間）における「確率空間」の概念を拡張した概念であり、必ずしも可換でない量についての確率的・統計的法則を扱うために導入される。非可換確率空間は、以下の 2 つから構成される。

- ***-代数** $\mathcal{A}$: これは、量の代数にあたる。「積」演算をもち、かつ複素共役や行列の共役転置の一般化である対合という操作「*」が備わっているものである。
- **状態** $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$: これは、量に対しその期待値を対応させる写像にあたる。線型性、正値性 (任意の a について $\varphi(a^*a) \geq 0$)、単位性（$\varphi(\epsilon) = 1$）をみたすものをいう。

古典確率論は、「非可換確率論の可換確率論の部分」として捉え直すことができる。実際、非常に一般的な条件をみたす「代数が可換な非可換確率空間」からは、古典確率空間を再構成することができる（Riesz-Markov-Kakutani の定理)。一方、$\mathcal{A}$ が可換とは限らない場合、非可換確率空間からは、ヒルベルト空間という内積をもった線型空間が構成できる（Gelfand-Naimark-Segal 構成)。代数の元はそこでの作用素として表現され、内積を用いて期待値が計算できる。つまり、非可換代数とその上の状態の組が与えられたなら、それらはかならずヒルベルト空間やそこでの作用素たちによって表現できるのである。古典確率論と「量子的な確率論」すなわち非可換確率論は別物なのではなくて、後者は前者の拡張なのである。

3　なぜ非可換確率論なのか？

では、どのような問題を考えるときに、古典確率論から出る必要があるのだろうか。本節では、「可能性の全体」が単なる「集合」としてではなくより一般の「圏」として考える必要があり、量の代数がその圏構造を反映する代数構造をもつと考えることが自然である場合には、必然的に非可換確率構造が問題になってくることを説明する。

古典確率論においては、確率変数が標本空間（集合）上の関数として捉えられる。直感的にいえば、「可能な結果」たちは互いに干渉しない独立な点の集まりをなしており、その上の代数構造は「各点ごと」に定められるため、確率変数たちの全体は「可換な *-代数」になる。これは、古典確率論が「互いに干渉しない独立な『点』からなる集合」として可能性の全体を捉える場合に有効な理論であることを意味する。しかし、量子現象のように「点ごと」の演算では記述できない場合、なにかもっと別の仕組みが必要となる。

その仕組みを与えるものこそ、「圏」という概念である。圏とは、直感的に言えば「合成可能な矢印たちのなすシステム」のようなものである。矢印（射）と矢印は、「点」的なもの（対象）を結

節として関連し合っている。単なる集合は、対象と恒等射のみからなる（異なる対象のあいだをつなぐような射は一本もない）圏と思うことができる。圏というものは、「バラバラな点からなる」集合というものを、「点の間にたくさんの連絡がある」ケースを許すようにまで拡張したようなものである。圏においては射が主役であるのだから、点だけの情報ではなく、「点の間の連絡のありよう」を情報として担うような「量」を考えるべきであろう。そのような量について、圏構造の核心である「合成」を反映させるような「積」は確かに定義できて、「たたみこみ」と呼ばれている。射を「文字」（不定元）であるかのように思い、二つの文字＝射の積は、それらが合成できるときは合成射、できないときは 0 とする、というルールにしたがって計算をするのである。こうすると、対象や射のなす関係性の構造が、「量」のなす代数に反映することになる。この代数を圏代数とよぶ。圏の異なる対象のあいだに一本でも射があれば、その圏代数は非可換になる。「連絡」そのものが量を規定しているようなケースでは、むしろ「可換」なほうがよほど珍しいといえる。

以上の議論は、量子力学の黎明期においてハイゼンベルクが着想したことの一般化ともいえる。ハイゼンベルクは、エネルギー準位という「点」＝「対象」たちの上の関数としてではなく、点と点の間の遷移という「矢印」＝「射」の上の関数として物理量を見直した。このとき、「連絡」すなわち「射」が無視できないせいで、それらの物理量全体は非可換な代数（行列代数）となるのである。さらに、一般の圏よりも構造の豊かな「ダガー圏（†-圏）」という、「矢印のひっくり返し」という構造をもつ圏として捉えることで、量子論を含む多くの「量子的」な構造を扱うことができる。ダガー圏について圏代数を考えると、（もちろん一般には非可換な！）$*$-代数が生まれ、その上の「状態」は、射の上の重みづけであってしかるべき性質をみたすものと対応する。要するに、古典確率空間は、点＝対象の上の重みづけを考えており、射の上の重みづけを考えると非可換確率論が始まるのである。

4　おわりに

本稿では、量子の数理の核心を非可換確率論であると捉え、非可換確率論の必然性を、背景となる圏構造に求めた。「可能性の全体」を集合ではなく一般の圏としてとらえるのが適切であるなら、非可換確率論が必要になってくる、ということである。圏構造（とくにダガー圏構造）からは非可換確率空間が自然に生まれてくる。したがって、もし対象とする現象において（ダガー）圏構造が重要な役割を果たし、その構造を反映した量を考えることに意味があるのであれば、そこに量子の数理の活躍の場が与えられる。

とくに、時空を圏として考えるとき、「（直接的に）因果的でない射」のうえにも重みをもつ状態を考えることが重要になってくる。このようなケースにおいて量子の数理を展開するのが、まさにオフシェル科学なのである。